


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления  
по образованию  
Могилевского облисполкома

  
А.Б.Заблоцкий  
«18» октября 2023 г.

### ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады  
по учебному предмету «Математика»

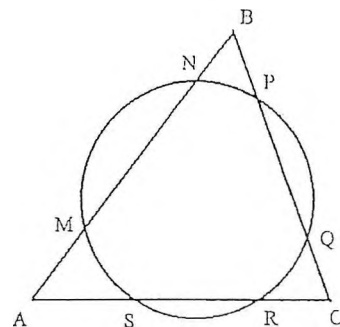
Дата проведения: 1 ноября 2023 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

### XI класс

1. Через две точки, лежащие на оси  $OY$ , с ординатами 5 и 11 соответственно, проведены две параллельные прямые. Первая прямая пересекает график функции  $y=x^2$  в точках  $A$  и  $D$ , вторая прямая пересекает график функции  $y=x^2$  в точках  $B$  и  $C$  (точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от оси  $OY$ ). Найти уравнения этих прямых, если площадь трапеции  $ABCD$  равна 36.

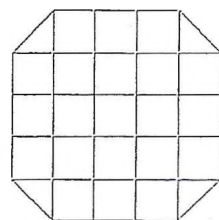
2. Окружность пересекает каждую сторону треугольника  $ABC$  в двух точках (см. рисунок): сторону  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  (порядок точек:  $A, M, N, B$ ), сторону  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  (порядок точек:  $B, P, Q, C$ ), сторону  $AC$  в точках  $R$  и  $S$  (порядок точек:  $A, S, R, C$ ). Оказалось, что точки  $A, N, P, C$  лежат на одной окружности, а также точки  $A, R, Q, B$  также лежат на одной окружности. Доказать, что точки  $B, M, S, C$  лежат на одной окружности.



3. Натуральное число  $n$ , не превышающее 2023, имеет 6 делителей, которые расположены по возрастанию:  $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6$ . При этом выполняется равенство:  $\frac{d_1}{d_2} + \frac{d_3}{d_4} + \frac{d_5}{d_6} = \frac{3}{7}$ . Найти все такие  $n$ .

4. В каждую клетку таблицы размера  $4 \times n$  (4 строки,  $n$  столбцов) записано одно из целых чисел от 0 до  $K$  ( $K > 0$ ). При каком наибольшем значении  $n$  при заданном значении  $K$  в таблицу можно записать числа таким образом, чтобы во всех строках сумма чисел была одинакова, а в любых двух столбцах различна, если число  $K$  является а) четным, б) нечетным?

5. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму либо одинаковых квадратов, либо равнобедренных прямоугольных треугольников (4 угловых треугольника). Стороны квадратов и треугольников являются улицами. Длина каждой стороны квадрата равна 1 км. Автомобилист хочет, выехав из какой-либо точки на одной из улиц города (по его выбору), проехать по каждой улице города не менее одного раза и в итоге вернуться в ту же точку. Какую наименьшую длину может иметь такой маршрут?



Оценка олимпиадных заданий  
по математике

Каждая задача оценивается **8** баллами.

Максимальное количество баллов за правильное выполнение заданий – **40**.

**Критерии оценки олимпиадных заданий:**

<i>Степень выполнения задания</i>	<i>Количество баллов</i>
Задача решена полностью (решение может отличаться от авторского)	<b>8</b>
Задача решена с недочетами или не все обоснования выполнены полностью	<b>5 – 7</b>
Задача решена наполовину	<b>4</b>
Правильно высказана идея, но ученик не смог ее реализовать	<b>1 - 2</b>
При решении допущены грубые ошибки	<b>1 – 3</b>
Дан правильный ответ, но нет решения	<b>1</b>
Учащийся только приступил к решению	<b>1 – 2</b>
Учащийся сделал несколько правильных шагов. <b>Нужно смотреть степень продвижения в решении</b>	<b>2– 7</b>

## 1. Решение:

Пусть прямые  $AD$  и  $BC$  имеют уравнения  $y=kx+5$  и  $y=kx+11$ . Легко видеть, что случай  $k=0$  не удовлетворяет условию задачи.

Пусть прямые  $BC$  и  $AD$  пересекают ось  $OX$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно, а ось  $OY$  в точках  $M(0; 11)$  и  $K(0; 5)$  соответственно (рисунок соответствует случаю  $k > 0$ ).

Пусть вершины трапеции имеют следующие координаты:  $A(a; a^2)$ ,  $B(b; b^2)$ ,  $C(c; c^2)$ ,  $D(d; d^2)$ . Пусть  $KH$  – высота трапеции  $ABCD$ .

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot KH.$$

Пусть  $\angle MKH = \alpha$ , тогда  $KH = MK \cdot \cos \alpha$ .

Заметим, что  $\angle MKH + \angle QKH + \angle QKO = 180^\circ$ .

$$\alpha + 90^\circ + \angle QKO = 180^\circ.$$

$\angle QKO = 90^\circ - \alpha$ . Тогда  $\angle KQO = \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha = k$ .

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + k^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ и } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$\text{Тогда } HK = \frac{MK}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{6}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$AD = \sqrt{(a-d)^2 + (a^2-d^2)^2} = \sqrt{(a-d)^2(1+(a+d)^2)} = |a-d|\sqrt{1+(a+d)^2}.$$

Поскольку точки  $A$  и  $D$  являются точками пересечения прямой  $AD$  и параболы  $y=x^2$ , то числа  $a$  и  $d$  являются корнями уравнения  $x^2 = kx+5$ ,  $x^2 - kx - 5 = 0$ .

$$a+d=k, \quad ad=-5.$$

$$|a-d|^2 = (a+d)^2 - 4ad = k^2 + 20, \quad |a-d| = \sqrt{k^2 + 20}.$$

$$\text{Отсюда } AD = \sqrt{k^2 + 20} \cdot \sqrt{1+k^2}.$$

$$\text{Аналогично получим } BC = \sqrt{k^2 + 44} \cdot \sqrt{1+k^2}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{k^2+20} \cdot \sqrt{1+k^2} + \sqrt{k^2+44} \cdot \sqrt{1+k^2}}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{\sqrt{k^2+20} + \sqrt{k^2+44}}{2} \cdot 6 =$$

$$= (\sqrt{k^2+20} + \sqrt{k^2+44}) \cdot 3.$$

$$\text{Итак, } (\sqrt{k^2+20} + \sqrt{k^2+44}) \cdot 3 = 36, \text{ откуда } k = \pm \sqrt{5}.$$

Искомые прямые имеют вид  $y = \pm \sqrt{5}x + 5$  и  $y = \pm \sqrt{5}x + 11$ .

**Ответ:**  $y = \pm \sqrt{5}x + 5$  и  $y = \pm \sqrt{5}x + 11$ .

## 2. Решение:

Имеем:  $AM \cdot AN = AS \cdot AR$ ,  $BP \cdot BQ = BN \cdot BM$ ,  $CR \cdot CS = CQ \cdot CP$ .

Далее:  $AM \cdot (AB - BN) = AS \cdot (CA - CR)$ ,

$BP \cdot (BC - CQ) = BN \cdot (AB - AM)$ ,

$CR \cdot (CA - AS) = CQ \cdot (BC - BP)$ .

Раскроем скобки и сложим данные равенства:

$$AM \cdot AB - AM \cdot BN + BP \cdot BC - BP \cdot CQ + CR \cdot CA - CR \cdot AS =$$

$$= AS \cdot CA - AS \cdot CR + BN \cdot AB - BN \cdot AM + CQ \cdot BC - CQ \cdot BP,$$

или после упрощения  $AM \cdot AB + BP \cdot BC + CR \cdot CA = AS \cdot CA + BN \cdot AB + CQ \cdot BC$ ,

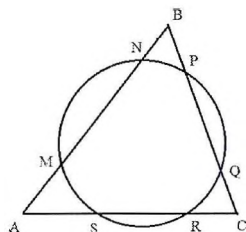
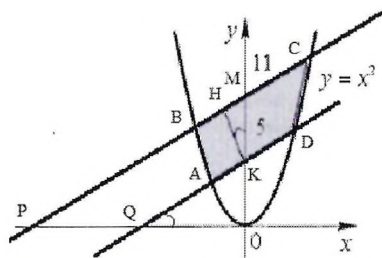
$$(AM \cdot AB - AS \cdot CA) + (BP \cdot BC - BN \cdot AB) + (CR \cdot CA - CQ \cdot BC) = 0.$$

Если точки  $A, N, P, C$  лежат на одной окружности, то  $BP \cdot BC = BN \cdot AB$  и  $BP \cdot BC - BN \cdot AB = 0$ .

Если точки  $A, R, Q, B$  лежат на одной окружности, то  $CR \cdot CA = CQ \cdot BC$  и  $CR \cdot CA - CQ \cdot BC = 0$ .

Но тогда и  $AM \cdot AB - AS \cdot CA = 0$  или  $AM \cdot AB = AS \cdot AC$ , что означает, что точки  $B, M, S, C$  лежат на одной окружности.

**Что и требовалось доказать.**



### 3. Решение:

Заметим, что  $d_1 = 1$ ,  $d_6 = n$ . При решении задачи удобно использовать следующую известную теорему:

Пусть натуральное число  $n$  имеет следующее разложение на простые множители  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ , где  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – различные простые делители числа  $n$ . Тогда количество делителей числа  $n$  (обозначается  $d(n)$ ) выражается формулой  $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ . Искомое число  $n$  имеет 6 делителей, а поскольку  $6 = 5+1$  или  $6 = (1+1) \cdot (2+1)$ , то оно может иметь следующее разложение на простые множители:  $n = p^5$ , или  $n = p^2 q^2$ , где  $p$  и  $q$  – различные простые числа.

1) Пусть  $n = p^5$ . Тогда делители числа  $n$  по возрастанию  $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$ . Тогда имеем:

$$\frac{1}{p} + \frac{p^3}{p^5} + \frac{p^4}{p^5} = \frac{3}{p^5}; \quad \frac{3}{p} = \frac{3}{p^5}, \text{ откуда } p=7. \text{ Тогда } n = 7^5 = 16807.$$

Однако  $16807 > 2023$ .

2) Пусть  $n = p^2 q^2$ . Тогда делители числа  $n$ :  $1, p, q, q^2, pq, pq^2$ . Рассмотрим различные случаи:

2.1)  $p < q$ . Тогда  $1 < p < q < pq < q^2 < pq^2$ . Тогда равенство из условия примет вид:

$$\frac{1}{p} + \frac{q}{pq} + \frac{q^2}{pq^2} = \frac{3}{p^2 q^2}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}; \quad \frac{3}{p} = \frac{3}{p^2 q^2}, \text{ откуда } p=7.$$

Так, как  $p < q$ , то:

если  $q=11$ , то  $n = 7 \cdot 11^2 = 847$ ;

если  $q=13$ , то  $n = 7 \cdot 13^2 = 1183$ ;

если  $q=17$ , то  $n = 7 \cdot 17^2 = 2023$ .

2.2)  $q < p < q^2$ . Тогда  $1 < q < p < q^2 < pq < pq^2$ . Тогда равенство из условия примет вид:

$$\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2} + \frac{pq}{pq^2} = \frac{3}{q^2}; \quad \frac{1}{q} + \frac{p}{q^2} + \frac{1}{q} = \frac{3}{q}; \quad \frac{2q+p}{q^2} = \frac{3}{q}, \quad 14q+7p=3q^2; \quad 7p=q(3q-14).$$

Правая часть последнего равенства делится на  $q$ , тогда и  $7p$  делится на  $q$ . Тогда  $q=7$  и  $7p=7(3 \cdot 7 - 14)$  и  $p=7$ . Противоречие.

2.3)  $q^2 < p$ . Тогда  $1 < q < q^2 < p < pq < pq^2$ . Тогда равенство из условия примет вид:

$$\frac{1}{q} + \frac{q^2}{p} + \frac{pq}{pq^2} = \frac{3}{q^2}; \quad \frac{1}{q} + \frac{q^2}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{q}; \quad \frac{2}{q} + \frac{q^2}{p} = \frac{3}{q}; \quad \frac{2p+q^3}{qp} = \frac{3}{q};$$

$$14p+7q^3=3pq; \quad 14p=3pq-7q^3; \quad 14p=q(3p-7q^2).$$

Правая часть последнего равенства делится на  $q$ , тогда и  $14p$  делится на  $q$ . Это возможно, при  $q=2$  или  $q=7$ . Если  $q=2$ , то  $14p=2(3p-7 \cdot 2^2)$ ;  $7p=3p-7 \cdot 2^2$ ,  $p=-7$ . Противоречие.

Если  $q=7$ , то  $14p=7(3p-7 \cdot 7^2)$ ;  $2p=3p-7^3$ ,  $p=7^3$ . Противоречие.

**Ответ: 847, 1183, 2023.**

### 4. Решение:

Сумма чисел в одном столбце может принимать значения от  $0+0+0+0=0$  до  $K+K+K+K=4K$ . т.е.  $4K+1$  различных значений. Таким образом, значение  $n$  не может превышать  $4K+1$ .

А) Пусть  $K$  – четное. Приведем пример таблицы  $4 \times (4K+1)$ , удовлетворяющей требованиям задачи.

	0	0	0	0	...	$K$	$K$	$K$	$K$
	0	0	0	1	...	$K-1$	$K$	$K$	$K$
	0	0	1	1	...	$K-1$	$K-1$	$K$	$K$
	0	1	1	1	...	$K-1$	$K-1$	$K-1$	$K$
Сумма	0	1	2	3		$4K-3$	$4K-2$	$4K-1$	$4K$

Докажем, что данная таблица удовлетворяет условию задачи. Будем заполнять таблицу следующим образом. Сначала в крайний левый столбец ставим все нули, в каждую ячейку крайнего правого столбца ставим  $K$ . Остальные клетки пока пусты. Сумма чисел в каждой строке стала равна  $K$ .

	0		...		$K$	Сумма	$K$
	0		...		$K$		$K$
	0		...		$K$		$K$
	0		...		$K$		$K$
Сумма	0		...		$4K$		

Далее заполняем второй справа и второй слева столбцы следующим образом (см. рис.)

	0	0		...		$K$	$K$	Сумма	$2K$
	0	0		...		$K$	$K$		$2K$
	0	0		...		$K$	$K$		$2K$
	0	1		...		$K-1$	$K$		$2K$
Сумма	0	1		...		$4K-1$	$4K$		

Следующий шаг (см. рис.)

	0	0	0		...		$K$	$K$	$K$	Сумма	$3K$
	0	0	0		...		$K$	$K$	$K$		$3K$
	0	0	1		...		$K-1$	$K$	$K$		$3K$
	0	1	1		...		$K-1$	$K-1$	$K$		$3K$
Сумма	0	1	2		...		$4K-2$	$4K-1$	$4K$		

Далее действуем аналогично. При этом после заполнения очередной пары столбцов сумма чисел в каждой строке будет оставаться неизменной. А сумма чисел в каждом следующем столбце в левой части будет увеличиваться на 1, а в правой части уменьшаться на 1.

Рассмотрим момент, когда, левый и правый «потоки столбцов» встретятся.

Если  $K$  – четное, то количество столбцов в таблице будет нечетным. В том случае потоки столбцов сойдутся в центральном столбце: в каждой клетке этого столбца будет записано число  $K/2$ . Этот столбец, а также соседние с ним столбцы будут иметь вид:

	0	0		$K/2-1$	$K/2-1$	$K/2$	$K/2+1$	$K/2+1$		$K$	$K$
	0	0		$K/2-1$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2+1$		$K$	$K$
	0	0	...	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	...	$K$	$K$
	0	1		$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$	$K/2$		$K-1$	$K$
Сумма	0	1		$4K/2-2$	$4K/2-1$	$4K/2$	$4K/2+1$	$4K/2+2$		$4K-1$	$4K$

Б) Пусть  $K$  – нечетное. Если  $n=4K+1$ , т.е. в таблице  $4K+1$  столбец и суммы чисел в столбцах принимают значения от 0 до  $4K$ , то сумма всех чисел в таблице равна  $0+1+2+\dots+4K=\frac{1+4K}{2} \cdot 4K=(1+4K) \cdot 2K$ .

Тогда сумма чисел в каждой строке будет равна:  $\frac{(1+4K) \cdot 2K}{4} = \frac{(1+4K) \cdot K}{2}$  и при нечетном  $K$  не является целым числом. Следовательно,  $n$  не может быть равным  $4K+1$ . Покажем, что  $n$  может быть равным  $4K$ .

Будем заполнять таблицу приведенным выше способом до тех пор, пока в крайнем правом столбце левого потока не будут записаны числа  $(K-1)/2$ , а крайнем левом столбце правого потока не будут записаны числа  $(K+1)/2$ .

0	0		$(K-1)/2$			$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0	...	$(K-1)/2$			$(K+1)/2$	...	$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$			$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	1		$(K-1)/2$			$(K+1)/2$		$K-1$	$K$
Сумма	0	1		$(4K-4)/2$		$(4K+4)/2$		$4K-1$	$4K$

Заполним еще одну пару столбцов.

0	0		$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	0	...	$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$	...	$K$	$K$
0	0		$(K-1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K+1)/2$		$K$	$K$
0	1		$(K-1)/2$	$(K+1)/2$	$(K-1)/2$	$(K+1)/2$		$K-1$	$K$
0	1		$2K-2$	$2K-1$	$2K+1$	$2K+2$		$4K-1$	$4K$

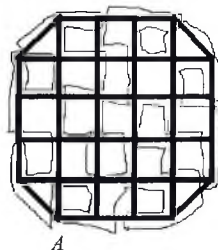
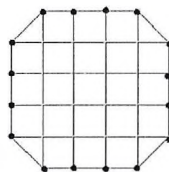
Таким образом, в данной таблице суммы столбцов по одному разу могут принимать все значения от 0 до  $4K$  за исключением  $2K$ , т.е. может принимать  $4K$  различных значений.

**Ответ:**  $4K+1$  при  $K$  – четном, и  $4K$  при  $K$  – нечетном.

#### 5. Решение:

*Способ 1.*

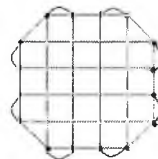
Несложно подсчитать, что всего в городе 52 улицы длиной 1 км и 4 улицы длиной  $\sqrt{2}$  км. Вершины квадратов назовем перекрестками. Заметим, что к 16 перекресткам (они отмечены точками) подходит нечетное число улиц. По одной из улиц, подходящих к такому перекрестку, автомобилисту придётся проехать дважды, причем наименьшая общая длина маршрута будет, если дважды автомобиль будет проезжать по улице длиной 1 км, а не  $\sqrt{2}$  км. Поскольку отрезок соединяет два перекрестка, лишних проездов будет не менее  $16:2=8$ . Итого весь путь составит не меньше  $52+8+4\sqrt{2}=60+4\sqrt{2}$  (км). Пример на рисунке показывает, что путь такой длины возможен. Начало маршрута – точка А.



**Ответ:**  $60+4\sqrt{2}$  км.

*Способ 2.*

Рассмотрим план города как граф, у которого перекрестки являются вершинами, а улицы ребрами. Тогда данный граф имеет 56 ребер. При этом 16 вершин имеют нечетную степень, равную 3. Добавим в граф 8 ребер длины 1 (км), соединив восемь пар вершин с нечетной степенью (см. рис). Теперь в графе 64 ребра и степени всех вершин четны. Согласно теореме Эйлера существует цикл, содержащий все ребра графа по одному разу. Длина соответствующего маршрута будет равна  $60+4\sqrt{2}$  км. Заметим, что при добавлении к исходному графу менее восьми ребер не останется вершина нечетной степени и требуемого цикла не будет.



**Ответ:**  $60+4\sqrt{2}$  км.

*Замечание.* При решении задачи вторым способом приводить пример требуемого цикла не обязательно. Теорема Эйлера доказывает его существование.