

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

А.Б.Заблоцкий

«18» октября 2023 г.



ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 1 ноября 2023 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 14.30.

VIII класс

1. На координатной плоскости проведены 2023 прямых, заданных уравнениями: $y = 1x + 2$, $y = 2x + 3$, $y = 3x + 4$, $y = 4x + 5$, ..., $y = 2022x + 2023$, $y = 2023x + 1$. Сколько точек пересечения образуют на плоскости эти прямые?

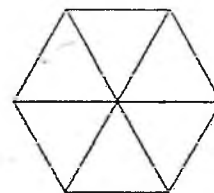
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AN и BK . Через середину стороны AB проведена прямая, перпендикулярная отрезку NK . Доказать, что данная прямая делит отрезок NK пополам.

3. Найти такие шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f , расположенных по возрастанию ($a < b < c < d < e < f$), чтобы было верно равенство:

$$\frac{ab}{cdef} + \frac{ac}{bdef} + \frac{ae}{bcd f} + \frac{af}{bcde} + \frac{bd}{acef} + \frac{cd}{abef} + \frac{de}{abcf} + \frac{df}{abce} = \frac{2023}{abcdef}.$$

4. В каждую клетку таблицы размера $4 \times n$ (4 строки, n столбцов) записано одно из целых чисел от 0 до 4. При каком наибольшем значении n в таблицу можно записать числа таким образом, чтобы во всех строках сумма чисел была одинакова, а в любых двух столбцах различна?

5. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму одинаковых равносторонних треугольников, которые в совокупности образуют шестиугольник. Стороны треугольников являются улицами. Длина каждой стороны (улицы) равна a км. Автомобилист хочет, выехав из какой-либо точки на одной из улиц города (по его выбору), проехать по каждой улице города не менее одного раза и в итоге вернуться в ту же точку. Какую наименьшую длину может иметь такой маршрут?



Математика
VIII класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. **Решение:**

Заметим, что все прямые кроме прямой $y = 2023x + 1$ проходят через точку $(-1; 1)$. При этом никакие две прямые не совпадают. Прямая $y = 2023x + 1$ пересекает остальные 2022 прямые. Итого получаем $1 + 2022 = 2023$ точки пересечения.

Ответ: 2023 точки.

2. **Решение:**

Обозначим середину стороны AB через M . В прямоугольном треугольнике ABH отрезок HM является медианой, проведенной к гипотенузе AB , поэтому $HM = \frac{1}{2}AB$.

Аналогично, из прямоугольного треугольника ABK получаем, что $KM = \frac{1}{2}AB$. Это означает, что треугольник HMK – равнобедренный с боковыми сторонами MH и MK .

Пусть перпендикуляр, проведенный из точки M к отрезку HK , пересекает HK в точке P . Тогда MP – высота равнобедренного треугольника HMK , а значит и его медиана, т.е. точка P – середина отрезка HK .

Что и требовалось доказать.

3. **Решение:**

Домножим обе части исходного равенства на $abcdef$:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + a^2c^2 + a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + c^2d^2 + d^2e^2 + d^2f^2 &= 2023; \\ (a^2b^2 + b^2d^2) + (a^2c^2 + c^2d^2) + (a^2e^2 + d^2e^2) + (a^2f^2 + d^2f^2) &= 2023; \\ b^2(a^2 + d^2) + c^2(a^2 + d^2) + e^2(a^2 + d^2) + f^2(a^2 + d^2) &= 2023; \\ (a^2 + d^2)(b^2 + c^2 + e^2 + f^2) &= 2023. \end{aligned}$$

Заметим, что $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3, d \geq 4, e \geq 5, f \geq 6$.

Тогда $a^2 + d^2 \geq 1 + 16 = 17, b^2 + c^2 + e^2 + f^2 \geq 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 74$.

Поскольку $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$, то $a^2 + d^2 = 17, b^2 + c^2 + e^2 + f^2 = 7 \cdot 17 = 119$.

Из первого уравнения получаем, что $a=1, d=4$. Тогда $b=2, c=3$, и второе уравнение примет вид:

$$2^2 + 3^2 + e^2 + f^2 = 119.$$

$$e^2 + f^2 = 106.$$

Поскольку $e < f$, то $e^2 < 106 : 2 = 53$. Т.е. число e может быть равным 5, 6, или 7. Из этих значений число f будет целым только при $e=5$. Тогда $f=9$.

Ответ: $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=9$.

4. **Решение:**

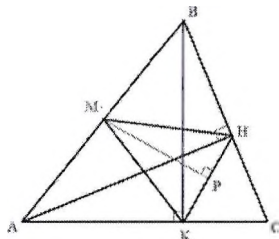
Сумма чисел в одном столбце может принимать значения от $0+0+0+0=0$ до $4+4+4+4=16$, т.е. 17 различных значений. Таким образом, значение n не может превышать 17. Приведем пример таблицы 4×17 , удовлетворяющей требованиям задачи.

0	0	0	0	1	1	1	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4
0	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4

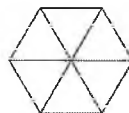
Ответ: 17.

5. **Решение:**

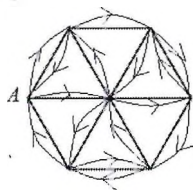
Способ 1.



Несложно подсчитать, что всего в городе 12 улиц длиной 1 км. Вершины треугольников назовем перекрестками. Заметим, что к шести перекресткам (вершинам шестиугольника) подходит нечетное число улиц. По одной из улиц, подходящих к такому перекрестку, автомобилисту придётся проехать дважды. Поскольку отрезок соединяет два перекрестка, лишних проездов будет не менее $6:2=3$. Итого весь путь составит не меньше $12+3=15$ (км).



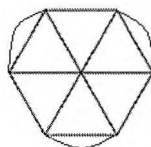
Пример на рисунке показывает, что путь такой длины возможен. Начало маршрута – точка А.



Ответ: 15 км.

Способ 2.

Рассмотрим план города как граф, у которого перекрестки являются вершинами, а улицы ребрами. Тогда данный граф имеет 12 ребер, из которых 6 вершин имеют нечетную степень, равную 3. Добавим в граф 3 ребра, соединив три пары вершин с нечетной степенью (см. рис). Теперь в графе 15 ребер и степени всех вершин четны. Согласно теореме Эйлера существует цикл, содержащий все ребра графа по одному разу. Поскольку длина каждого ребра равна 1 км, то длина соответствующего маршрута будет равна 15 км. Заметим, что при добавлении к исходному графу менее трех ребер в нем останется вершина нечетной степени и требуемого цикла не будет.



Ответ: 15 км.

Замечание. При решении задачи вторым способом приводить пример требуемого цикла не обязательно. Теорема Эйлера доказывает его существование.