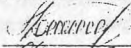


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления  
по образованию  
Могилевского облисполкома

 А.Б.Заблоцкий  
«20» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады  
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 27 ноября 2021 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

Х класс

1. Окружность, центр которой лежит на ветви гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ , расположенной в первой координатной четверти, проходит через начало координат  $O$  и второй раз пересекает координатные оси в точках  $A$  и  $B$ . Найти площадь треугольника  $AOB$ .
2. Числитель и знаменатель правильной дроби — двузначные числа, причем цифра единиц числителя совпадает с цифрой десятков знаменателя. Вася «сократил» дробь, зачеркнув эти одинаковые цифры. Удивительно, но полученная дробь оказалась равна исходной. Установите, какие дроби мог «сокращать» Вася.
3. Пусть  $P(x)$  многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами. Известно, что  $P(1) = 8$ ,  $P(12) = 2021$ . Найти  $P(x)$ .
4. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . Окружность, проходящая через точку  $B$ , касается стороны  $AC$  в точке  $M$  и пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Доказать, что  $\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC^2}{AB^2}$ , где  $S(\triangle AKM)$  и  $S(\triangle CLM)$  — площади треугольников  $AKM$  и  $CLM$  соответственно.
5. В турнире по футболу участвовали  $n$  команд. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. По окончании турнира оказалось, что у команды  $A$  число побед превышает число поражений, но при этом команда  $A$  заняла последнее место, набрав меньше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?<sup>\*</sup>  
В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

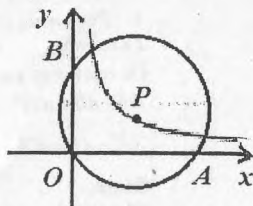
---

Пользоваться калькулятором не разрешается

1. Решение:

Пусть точка  $P(a; \frac{1}{a})$  — центр окружности. Тогда уравнение этой окружности будет иметь вид:  $(x-a)^2 + (y-\frac{1}{a})^2 = R^2$ .

Так как точка  $O(0;0)$  лежит на окружности, то  $(0-a)^2 + (0-\frac{1}{a})^2 = R^2$ , откуда  $a^2 + \frac{1}{a^2} = R^2$ .



$$\text{Имеем: } (x-a)^2 + (y-\frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - \frac{2y}{a} + \frac{1}{a^2} = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - \frac{2y}{a} = 0 \quad (1).$$

Пусть данная окружность пересекает оси  $OX$  и  $OY$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Найдем (1) координаты точки  $A$ :  $y=0$ ,  $x^2 - 2ax = 0$ . Т.к.  $x > 0$ , то  $x=2a$ , т.е.  $A(2a; 0)$ . Найдем координаты точки  $B$ :  $x=0$ ,  $y^2 - \frac{2y}{a} = 0$ . Т.к.  $y > 0$ , то  $y = \frac{2}{a}$ , т.е.  $B(0; \frac{2}{a})$ .

$$\text{Итак } OA=2a, OB=\frac{2}{a}, S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2 \text{ (кв.ед.)}$$

Ответ: 2 кв. ед.

2. Решение:

Пусть  $\frac{10a+b}{10b+c}$  — исходная дробь, где  $a, b, c$  — цифры. Тогда  $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$ , или  $10ab - 10ac = bc - ac$ , или  $5 \cdot 2a(b-c) = c(b-a)$ . Так как  $c(b-a)$  делится на простое число 5, то  $c : 5$  или  $(b-a) : 5$ .

Если  $c : 5$ , то  $c = 5$  и  $2a(b-5) = b-a$ . Из четырех вариантов для  $b$  (6, 7, 8, 9) условию задач соответствуют два:  $b_1 = 6, a_1 = 2$  и  $b_2 = 9, a_2 = 1$ .

Если  $(b-a) : 5$ , то  $b = a + 5$  и  $2a(b-c) = c$ . Из четырех вариантов для  $a$  (1, 2, 3, 4) условию задач соответствуют два:  $a_1 = 1, b_1 = 6, c_1 = 4$  и  $a_2 = 4, b_2 = 9, c_2 = 8$ .

Таким образом, Вася мог «сокращать» одну из четырех дробей:  $\frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{49}{98}$ .

$$\text{Ответ: } \frac{26}{65}, \frac{19}{95}, \frac{16}{64}, \frac{49}{98}.$$

3. Решение:

Так как  $P(1) = 8$ , то коэффициенты многочлена  $P(x)$  могут принимать целые значения только от 0 до 8. Поскольку  $2021 < 12^4$  и  $2021 > 12^3 \cdot 8$ , многочлен  $P(x)$  имеет степень 3, т.е.  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \geq 1, b, c, d \geq 0, a+b+c+d = 8$ .

$$\text{Имеем: } 2021 = a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d.$$

$$2021 < 2 \cdot 12^3, \text{ т.е. } a=1.$$

$$2021 = 1728 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, 293 = b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d, \text{ где } b+c+d = 7.$$

Отсюда следует, что  $b \leq 2$ .

Пусть  $b=1$ , тогда  $293 = 144 + c \cdot 12 + d, 149 = c \cdot 12 + d$ , где  $c+d = 6$ . Однако  $149 > 12 \cdot 6$ . Противоречие.

Пусть  $b=2$ , тогда  $293 = 288 + c \cdot 12 + d$ ,  $5 = c \cdot 12 + d$ , где  $c + d = 5$ . Откуда  $c=0$ ,  $d=5$ .

Итак,  $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ .

Ответ:  $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ .

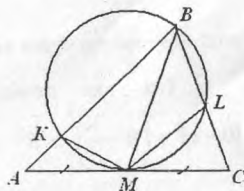
#### 4. Решение:

##### 1 способ.

По свойству касательной и секущей имеем:

$AK \cdot AB = AM^2$ ,  $CL \cdot CB = CM^2$ . Поскольку  $AM=CM$ , то

$AK \cdot AB = CL \cdot CB$ , откуда  $\frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}$  (1).



Далее,

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{AK \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{2AB} \cdot S(\triangle AKM) = \frac{AK}{2AB} S(\triangle ABC) \quad (2).$$

$$\frac{S(\triangle CLM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot AC} = \frac{CL}{2BC} \cdot S(\triangle CLM) = \frac{CL}{2BC} S(\triangle ABC) \quad (3)$$

Из (2) и (3) с учетом (1) получаем:

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{AK}{CL} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

##### 2 способ.

Как и в первом способе доказываем, что  $\frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}$ .

Далее,  $S(\triangle AKM) = \frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A$ ,  $S(\triangle CLM) = \frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C$ .

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A}{\frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C} = \frac{AK \cdot \sin A}{CL \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C}.$$

По теореме синусов для треугольника ABC имеем:  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ ,  $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC}{AB}$ .

$$\text{Тогда } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot BC}{AB \cdot AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

#### 5. Решение:

Команда A провела  $n-1$  игру. Если у нее побед больше, чем поражений, то минимальное число очков, которое она могла набрать – это  $3 + (n-2) = n+1$  (это будет в случае, если команда A выиграла одну игру, а остальные свела вничью). Каждая из  $n-1$  оставшихся команд должна набрать не меньше, чем  $n+2$  очка. Поэтому сумма очков, набранных остальными командами должна быть не меньше, чем  $(n-1)(n+2) = n^2 + n - 2$ . В играх между собой  $n-1$  команд могут набрать не более,

чем  $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2}$  очков: они проведут между собой  $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$  игр, каждая из которых

принесет в общую копилку максимум 3 очка в случае победы одной из команд. Кроме того, оставшиеся  $n-1$  команд наберут в сумме  $n-2$  очка за счет ничьих с командой A. Итак, сумма очков,

набранная остальными командами не превышает  $\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2$ . Получаем неравенство:

$$\frac{3 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2} + n - 2 \geq n^2 + n - 2. \text{ Откуда } n \geq 9.$$

Пусть  $n=9$ . Тогда команда A наберет не менее  $3+7=10$  очков. Каждая из остальных команд должна набрать не менее 11 очков. Сумма очков остальных команд не меньше, чем 88. В играх

между собой остальные 8 команд наберут не более, чем  $\frac{3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 84$  очка. Плюс еще 7 очков в играх с командой  $A$ . Итого, остальные команды могут в сумме набрать максимум  $84+7=91$  очко, но при этом они должны набрать не менее 88 очков. Это означает, что им в играх между собой допускается играть вничью не более трех раз. Игры остальных команд между собой будем называть «турнир восьми». В «турнире восьми» будет сыграно  $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$  матчей. Рассмотрим возможные количества ничьих на «турнире восьми».

1) На «турнире восьми» не было ничьих. Тогда всего было одержано 28 побед.  $28 = 3 \cdot 8 + 4$  – это означает, что не менее четырех команд ( $8-4=4$ ) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. С учетом ничьей с командой  $A$ , каждая из этих команд в исходном турнире набрала не более 10 очков.

2) На «турнире восьми» была 1 ничья. Тогда всего было одержано 27 побед.  $27 = 3 \cdot 8 + 3$  – это означает, что не менее пяти команд ( $8-3=5$ ) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Ничья прибавит по очку не более, чем двум из них. Тогда не менее, чем  $5-2=3$  команды с учетом ничьей с командой  $A$ , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

3) На «турнире восьми» было 2 ничьи. Тогда всего было одержано 26 побед.  $26 = 3 \cdot 8 + 2$  – это означает, что не менее шести команд ( $8-2=6$ ) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Две ничьи прибавят по очку не более, чем четырем из них. Тогда не менее, чем  $6-4=2$  команды с учетом ничьей с командой  $A$ , наберут в исходном турнире не более 10 очков.

4) На «турнире восьми» было 3 ничьи. Тогда всего было одержано 25 побед.  $25 = 3 \cdot 8 + 1$  – это означает, что не менее семи команд ( $8-1=7$ ) одержали в «турнире восьми» ровно 3 победы. Три ничьи прибавят по очку не более, чем шести из них. Тогда найдется команда, которая с учетом ничьей с командой  $A$ , наберет в исходном турнире не более 10 очков.

Получается, что 9 команд на турнире быть не может.

Пусть  $n=10$ . Тогда команда  $A$  наберет не менее  $3+8=11$  очков. Покажем, что каждая из остальных команд может набрать более 11 очков. Расположим остальные 9 команд по кругу. Пусть каждая команда побеждает следующие 4 команды, находящиеся за ней по ходу часовой стрелки, и проигрывает четырем командам, следующим за ней против хода часовой стрелки. Тогда «турнир девяти» каждая команда 4 раза выиграет и 4 раза проиграет и наберет 12 очков. В исходном турнире, учитывая игры с командой  $A$ , восемь из оставшихся команд наберут по 13 очков, и одна (которая проиграла команде  $A$ ) наберет 12 очков.

**Ответ: 10 команд.**