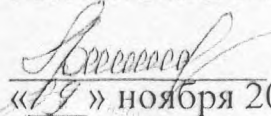


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

 А.Б.Заблоцкий
«19» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 27 ноября 2021 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

XI класс

1. Вершины A и B равностороннего треугольника AOB лежат на ветви гиперболы $y = \frac{1}{x}$, расположенной в первой координатной четверти. Третья вершина O – начало координат. Найти площадь треугольника AOB .

2. Доказать, что для всех натуральных n верно неравенство
$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{5}{9}.$$

3. Пусть $P(x)$ многочлен с целыми неотрицательными коэффициентами. Известно, что $P(1) = 9$, $P(5) = 2021$. Найти $P(x)$.

4. В треугольнике ABC проведена медиана BM . Окружность описанная около треугольника ABM , пересекает сторону BC в точке L . Окружность, описанная около треугольника BMC , пересекает сторону AB в точке K . Доказать, что $\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC^2}{AB^2}$, где $S(\triangle AKM)$ и $S(\triangle CLM)$ – площади треугольников AKM и CLM соответственно.

5. В турнире по футболу участвовали n команд. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. По окончании турнира оказалось, что у команды A число побед меньше числа поражений, но при этом команда A заняла первое место, набрав больше всех очков. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

1. Решение:

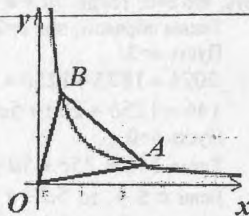
Пусть вершины треугольника AOB имеют следующие координаты: $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$, $O(0; 0)$.

Выразим квадраты длин сторон треугольника:

$$AO^2 = (a-0)^2 + \left(\frac{1}{a}-0\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$BO^2 = (b-0)^2 + \left(\frac{1}{b}-0\right)^2 = b^2 + \frac{1}{b^2}$$

$$AB^2 = (a-b)^2 + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2.$$



Так как $AO=BO$, то $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 + \frac{1}{b^2}$, $a^2 - b^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$, $a^2 - b^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2}$. Поскольку $a^2 \neq b^2$ и $a>0, b>0$, то $ab=1$, $b = \frac{1}{a}$.

$$\text{Тогда } AB^2 = (a-b)^2 + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}-a\right)^2 = 2 \cdot \left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\text{Поскольку } AB=AO, \text{ то } 2 \cdot \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, \quad 2a^2 + \frac{2}{a^2} - 4 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$\text{Откуда } a^2 + \frac{1}{a^2} = 4, \text{ т.е. } AO^2 = 4.$$

$$\text{Площадь треугольника } ABC: s = \frac{AO^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ (кв.ед).}$$

Ответ: $\sqrt{3}$ ед. кв.

2. Доказательство:

$$\text{Обозначим } S(n) = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}. \quad \text{Тогда } S(n+1) - S(n) =$$

$$\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+4} > 0, \text{ т.е. сумма растет с ростом } n. \text{ Остается убедиться,}$$

$$\text{что } S(1) > \frac{5}{9}. \text{ Действительно } S(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{21}{36} > \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Что и требовалось доказать.

3. Решение:

Так как $P(1) = 9$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 9. Поскольку $2021 < 5^5$ и $2021 > 5^3 \cdot 9$, многочлен $P(x)$ имеет степень 4, т.е. $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \geq 1$, $b, c, d, e \geq 0$, $a + b + c + d + e = 9$.

Имеем: $2021 = 625a + 125b + 25c + 5d + e$. Т.к. $625 \cdot 4 = 2500$, то a должно принять значение 1, 2 или 3.

Пусть $a=1$.

$$2021 = 625 + 125b + 25c + 5d + e. \quad 1396 = 125b + 25c + 5d + e, \quad b + c + d + e = 8. \text{ Однако } 125 \cdot 8 \leq 1396. \text{ Противоречие.}$$

Пусть $a=2$.

$$2021 = 1250 + 125b + 25c + 5d + e. \quad 771 = 125b + 25c + 5d + e, \text{ где } b + c + d + e = 7.$$

Так как $125 \cdot 7 = 875 > 771$, то $b \leq 6$.

Если $b \leq 4$, то $25c + 5d + e \geq 771 - 500$, т.е. $25c + 5d + e \geq 271$, но $25 \cdot 7 = 175 < 271$.

Если $b = 5$, то $25c + 5d + e = 771 - 625$, т.е. $25c + 5d + e = 146$, где $c + d + e = 2$. Но $25 \cdot 2 = 50 < 146$.

Если $b = 6$, то $25c + 5d + e = 771 - 750$, т.е. $25c + 5d + e = 21$, где $c + d + e = 1$. Легко видеть, что $c = 0$. Тогда $5d + e = 21$, где $d + e = 1$. Но $5 \cdot 1 = 5 < 21$.

Таким образом, при $a = 2$ получаем противоречие.

Пусть $a = 3$.

$$2021 = 1875 + 125b + 25c + 5d + e.$$

$$146 = 125b + 25c + 5d + e, \text{ где } b + c + d + e = 6. \text{ Легко видеть, что } b \leq 1.$$

Пусть $b = 0$.

$$\text{Тогда } 146 = 25c + 5d + e, \text{ где } c + d + e = 6, \text{ причем } c \leq 5.$$

Если $c \leq 4$, то $5d + e \geq 146 - 100$, $5d + e \geq 46$. Однако, $5 \cdot 6 < 46$. Противоречие.

Если $c = 5$, то $5d + e \geq 146 - 125$, $5d + e = 21$, где $d + e = 1$. Это, очевидно, невозможно.

$$\text{Пусть } b = 1. \text{ Тогда } 146 = 125 + 25c + 5d + e.$$

$$21 = 25c + 5d + e, \text{ где } c + d + e = 5.$$

Очевидно, $c = 0$, $21 = 5d + e$, откуда $d = 4$, $e = 1$.

$$\text{Итак, } P(x) = 3x^4 + x^3 + 4x + 1.$$

$$\text{Ответ: } P(x) = 3x^4 + x^3 + 4x + 1.$$

4. Доказательство:

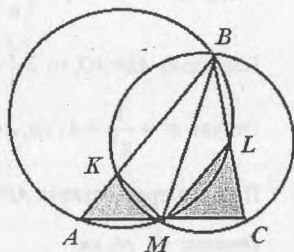
1 способ.

По свойству секущих имеем:

$$AK \cdot AB = AM \cdot AC, \quad CL \cdot CB = CM \cdot CA.$$

Поскольку

$$AM = CM, \text{ то } AK \cdot AB = CL \cdot CB, \text{ откуда } \frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB} \quad (1).$$



$$\text{Далее, } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{AK \cdot AM}{AB \cdot AC} = \frac{AK}{2AB}.$$

$$S(\triangle AKM) = \frac{AK}{2AB} S(\triangle ABC) \quad (2).$$

$$\frac{S(\triangle CLM)}{S(\triangle ABC)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot AC} = \frac{CL}{2BC}, \quad S(\triangle CLM) = \frac{CL}{2BC} S(\triangle ABC) \quad (3).$$

Из (2) и (3) с учетом (1) получаем:

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BC}{CL} = \frac{AK}{CL} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

2 способ.

$$\text{Как и в первом способе доказываем, что } \frac{AK}{CL} = \frac{BC}{AB}.$$

$$\text{Далее, } S(\triangle AKM) = \frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A, \quad S(\triangle CLM) = \frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C.$$

$$\frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{\frac{1}{2} AK \cdot AM \cdot \sin A}{\frac{1}{2} CL \cdot CM \cdot \sin C} = \frac{AK \cdot \sin A}{CL \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C}.$$

$$\text{По теореме синусов для треугольника } ABC \text{ имеем: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}, \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{BC}{AB}.$$

$$\text{Тогда } \frac{S(\triangle AKM)}{S(\triangle CLM)} = \frac{BC \cdot \sin A}{AB \cdot \sin C} = \frac{BC \cdot BC}{AB \cdot AB} = \frac{BC^2}{AB^2}.$$

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Рассмотрим случай четного и нечетного значений n .

1) Пусть n – четно, т.е. $n=2k$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k-1$ игре. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1)$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и не сделает ни одной ничьей.

Докажем, что среди остальных команд всегда найдется команда, которая наберет не меньше, чем $3+1 \cdot (2k-2) = 2k+1$ очка (столько очков, например, наберет команда, которая обыграла команду A и остальные игры свела вничью).

Предположим, что каждая из остальных команд набрала не более $2k$ очков. Тогда сумма очков остальных команд должна быть не более чем $2k \cdot (2k-1) = 4k^2 - 2k$. Оценим минимально возможную сумму очков остальных команд. В играх с командой A они набрали $3k$ очков. Между собой остальные $2k-1$ команды проведут $\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}$ игры. В каждой игре разыгрывается 2 (если ничья) или 3 (если победит одна из команд) очка. Поэтому минимально возможная сумма очков остальных команд равна:

$$3k + \frac{(2k-1)(2k-2)}{2} \cdot 2 = 3k + (2k-1)(2k-2) = 4k^2 - 3k + 2.$$

Найдем разность между максимально и минимально возможными суммами очков остальных команд:

$(4k^2 - 2k) - (4k^2 - 3k + 2) = k - 2$. Это число равно наибольшему количеству игр между остальными $2k-1$ командами, которые могли закончиться победой одной из команд.

Если все игры между остальными $2k-1$ командами закончатся вничью, то k команд, обыгравшие команду A наберут в итоге по $3+1 \cdot (2k-2) = 2k+1$ очка. Т.к. $2k+1 > 2k$, то каждой из k команд в сумме ее очков необходимо хотя бы одну единицу заменить на нолик, т.е. вместо ничьей записать поражение, т.е. не менее, чем в k играх между остальными командами должна быть зафиксирована победа одной из команд. Однако, как уже установлено максимальное количество побед в играх между ними равно $k-2$. Противоречие. Итак, найдется команда, набравшая не меньше, чем $2k+1$ очко. Поскольку команда A , занявшая 1 место, наберет не более $3(k-1)$ очка, то получаем неравенство: $3(k-1) > 2k+1$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n – это $2 \cdot 5 = 10$. Легко видеть, что случай $n=10$ возможен. Если команда A из 9 игр выиграет 4 игры и проиграет 5 игр, то она наберет 12 очков. Если все остальные игры турнира закончатся вничью, то 5 команд, обыгравших A , наберут по $3+1 \cdot 8 = 11$ очков, 4 команды, проигравшие A , наберут по 8 очков. Таким образом, команда A занимает первое место.

2) Пусть n – нечетно, т.е. $n=2k+1$, где k – натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k$ игр. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A – это $3(k-1)+1 = 3k-2$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и 1 игру сведет вничью.

Докажем, что среди остальных команд всегда найдется команда, которая наберет не меньше, чем $3+1 \cdot (2k-1) = 2k+2$ очка (столько очков, например, наберет команда, которая обыграла команду A и остальные игры свела вничью).

Предположим, что каждая из остальных команд набрала не более $2k+1$ очков. Тогда сумма очков остальных команд должна быть не более чем $(2k+1) \cdot 2k = 4k^2 + 2k$. Оценим минимально возможную сумму очков остальных команд. В играх с командой A они набрали $3k+1$ очков. Между собой остальные $2k$ команды проведут $\frac{2k(2k-1)}{2}$ игры. В каждой игре разыгрывается 2 (если ничья) или 3 (если победит одна из команд) очка. Поэтому минимально возможная сумма очков остальных команд равна: $3k+1 + \frac{2k(2k-1)}{2} \cdot 2 = 3k+1 + 2k(2k-1) = 4k^2 + k + 1$. Найдем разность между максимально и минимально возможными суммами очков остальных команд:

$(4k^2 + 2k) - (4k^2 + k + 1) = k - 1$. Это число равно наибольшему количеству игр между остальными $2k$ командами, которые могли закончиться победой одной из команд.

Если все игры между остальными $2k$ командами закончатся вничью, то k команд, обыгравшие команду A наберут в итоге по $3 + 1 \cdot (2k - 1) = 2k + 2$ очка. Т.к. $2k + 2 > 2k + 1$, то каждой из k команд в сумме ее очков необходимо хотя бы одну единичку заменить на нолик, т.е. вместо ничьей записать поражение, т.е. не менее, чем в k играх между остальными командами должна быть зафиксирована победа одной из команд. Однако, как уже установлено максимальное количество побед в играх между ними равно $k - 1$. Противоречие. Итак, найдется команда, набравшая не меньше, чем $2k + 2$ очков. Поскольку команда A , занявшая 1 место, наберет не более $3(k - 1) + 1 = 3k - 2$ очка, то получаем неравенство: $3k - 2 > 2k + 2$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n — это $2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Поскольку $11 > 10$, то в качестве ответа берем значение n равное 10.

Ответ: 10 команд.