

УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома

 А.Б.Заблоцкий
«19» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

Дата проведения: 27 ноября 2021 г.

Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

IX класс

1. Докажите, что ни при каком целом n значение выражения $\frac{n^2 - 3n + 4}{49}$ не является целым числом.

2. Пусть $P(x)$ квадратный трехчлен с целыми неотрицательными коэффициентами. Известно, что $P(1) = 29$, $P(25) = 2021$. Найти $P(x)$.

3. Вершины ромба $ABCD$ лежат на координатных осях, а каждая сторона касается одного из графиков функций $y = \frac{1}{x}$ или $y = -\frac{1}{x}$. Найти площадь ромба.

4. В треугольнике ABC проведена медиана BM . Из точки A проведена касательная к окружности, проходящей через точки B , M и C . Пусть K – точка касания. Из точки C проведена касательная к окружности, проходящей через точки A , M и B . Точку касания обозначим через P . Доказать, что $AK = CP$.

5. В турнире по футболу участвовали n команд. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. По окончании турнира оказалось, что команда A , которая чаще проигрывала, чем выигрывала, набрала очков больше, чем команда B , которая чаще выигрывала, чем проигрывала. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

IX класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. Доказательство:

Перебором остатков при делении на 7 устанавливаем, что числитель только тогда делится на 7, когда $n = 7k + 5$ при некотором целом k . В этом случае $\frac{n^2 - 3n + 4}{49} = \frac{49(k^2 + k) + 14}{49} =$

$\frac{7(k^2 + k) + 2}{7}$. Легко видеть, что последняя дробь не может быть равной целому числу ни при каком k .

Что и требовалось доказать.

2. Решение:

Так как $P(1) = 29$, то коэффициенты многочлена $P(x)$ могут принимать целые значения только от 0 до 29. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \geq 1$; $b, c \geq 0$, $a + b + c = 29$.

Имеем: $2021 = 625a + 25b + c$.

Поскольку $4 \cdot 25^2 > 2021$, то $a \leq 3$.

Если $a=1$ или $a=2$, то $625a \leq 1250$. Тогда $771 \leq 25b + c$. Однако $25 \cdot 28 = 700$. Противоречие.

Значит $a=3$. Итак, $2021 = 625 \cdot 3 + 25b + c$, $146 = 25b + c$, где $b + c = 26$.

Так как $25 \cdot 6 > 146$, то $b \leq 5$. Если $b \leq 4$, то $c \geq 46$. Противоречие.

Значит $b=5$. $146 = 25 \cdot 5 + c$, $c=21$.

Итак, $P(x) = 3x^2 + 5x + 21$.

Ответ: $P(x) = 3x^2 + 5x + 21$.

3. Решение:

Пусть вершины A и C лежат на оси OX , а вершины B и D лежат на оси OY . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O — начале координат. Чтобы найти площадь ромба $ABCD$, найдем площадь треугольника AOB и затем умножим ее на 4. Пусть уравнение прямой AB имеет вид: $y = kx + b$. Поскольку

эта прямая касается графика функции $y = \frac{1}{x}$ (т.е. имеет с ним

одну общую точку), то уравнение $kx + b = \frac{1}{x}$ имеет

единственное решение (причем, очевидно, положительное).

Имеем: $kx^2 + bx - 1 = 0$, $D=0$, $b^2 + 4k = 0$. Откуда $k = -\frac{b^2}{4}$.

Уравнение прямой AB примет вид $y = -\frac{b^2}{4}x + b$, где $b \neq 0$. Найдем координаты точек A и B .

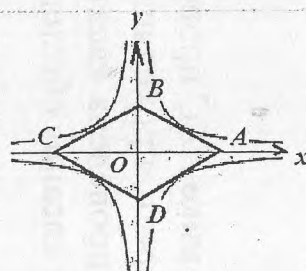
Точка A : $y=0$. $0 = -\frac{b^2}{4}x + b$, откуда $x = \frac{4}{b}$, т.е. $A\left(\frac{4}{b}; 0\right)$.

Точка B : $x=0$. $y = -\frac{b^2}{4} \cdot 0 + b$, откуда $y = b$, т.е. $B(0; b)$.

Тогда $AO = \frac{4}{b}$, $BO = b$. $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{b} \cdot b = 2$.

Тогда площадь ромба $ABCD$ $S = 4 \cdot S_{\triangle AOB} = 4 \cdot 2 = 8$ (кв.ед).

Ответ: 8 кв.ед.



4. Доказательство:

По свойству касательной и секущей имеем:

$AK^2 = AM \cdot AC$, $CP^2 = CM \cdot CA$. Поскольку $AM=CM$, то

$AM \cdot AC = CM \cdot CA$, откуда $AK^2 = CP^2$, $AK=CP$.

Что и требовалось доказать.

5. Решение:

Каждая из n команд провела по $n-1$ игре. Рассмотрим случаи четного и нечетного значений n .

1) Пусть n — четно, т.е. $n=2k$, где k — натуральное число.

Тогда каждая команда провела по $2k-1$ игре. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A — это $3(k-1)$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и не сделает ни одной ничьей.

Если у команды B побед больше, чем поражений, то наименьшее число очков, которое она могла набрать — это $3 + 1 \cdot (2k-2) = 2k+1$ (это будет в случае, если команда B выиграла одну игру, а остальные свела вничью).

Поскольку команда A набрала очков больше, чем команда B , то должно выполняться неравенство: $3(k-1) > 2k+1$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n равно $2 \cdot 5 = 10$. Легко видеть, что случай $n=10$ возможен. Если команда A из 9 игр выиграет 4 игры и проиграет 5 игр, то она наберет 12 очков. Если команда B обыграет команду A , но остальные игры сведет вничью, то она наберет $3 + 1 \cdot 8 = 11$ очков.

2) Пусть n — нечетно, т.е. $n=2k+1$, где k — натуральное число. Тогда каждая команда провела по $2k$ игр. Если у команды A побед меньше, чем поражений, то наибольшее количество очков, которое может набрать команда A — это $3(k-1) + 1 = 3k-2$. Это произойдет, если команда A выиграет $k-1$ игру, проиграет k игр и 1 игру сведет вничью.

Если у команды B побед больше, чем поражений, то наименьшее число очков, которое она могла набрать — это $3 + 1 \cdot (2k-1) = 2k+2$.

Поскольку команда A набрала очков больше, чем команда B , то должно выполняться неравенство: $3k-2 > 2k+2$, откуда $k > 4$. Тогда наименьшее значение n — это $2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Поскольку $11 > 10$, то в качестве ответа берем значение n равное 10.

Ответ: 10 команд.

