УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель начальника главного управления по образованию
Могилевского облисполкома
____________ И.Г. Лошкевич
«____» ____________ 2022 г.

ЗАДАНИЯ
для проведения городских, районных олимпиад по учебному предмету «Математика»

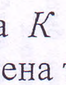
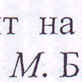
Дата проведения: 31 марта 2022 г.
Время выполнения заданий: 10.00 – 13.30.

VII класс

1. Напишите наибольшее натуральное число кратное 15, которое бы не превышало 20212022 и все цифры которого были бы различны. Ответ обоснуйте.

2. Вдоль дороги растут 120 берез. На некоторых березах сидят птицы: грачи, голуби и ласточки. При этом на одном дереве могут сидеть более одной птицы. Известно, среди любых двух подряд стоящих берез, найдется ровно одна береза, на которой сидит грач. Среди любых трех подряд стоящих берез найдется ровно одна береза, на которой сидит голубь. Среди любых пяти подряд стоящих берез найдется ровно одна береза, на которой сидит ласточка. Сколько найдется берез, на которых не сидит ни одна из птиц, если на последней березе сидят голубь, грач и ласточка? Ответ обоснуйте.

3. В треугольнике *ABC* (*AB*>*BC*) проведена биссектриса *BK* угла *B* (точка *K* лежит на отрезке *AC*). На продолжении стороны *AB* за точку *B* отмечена точка *M*. Биссектриса угла *MBC* пересекает продолжение стороны *AC* за точку *C* в точке *P*. Найти величину угла *BAC*, если $\angle BPC=20°$ и *AK*=*BK*.

4. Шахматная доска 8×8 полностью замощена фигурками двух видов: 1)  и 2)  . Доказать, что количсство фигурок второго вида четно.

5. На доске записано несколько натуральных чисел. Дима выписал все возможные произведения каких-либо двух из этих чисел. При этом, среди чисел выписанных Димой, могут встретиться одинаковые. Оказалось, что среди чисел, выписанных Димой, встретились 44 четных числа. Какое наибольшее количество четных чисел могло быть записано на доске? Ответ обоснуйте.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Указания к решению VII класс

<u>*Решения учащихся могут отличаться от авторских.*</u>

1. *Подсказка:* Натуральное число кратно 15, если оно кратно 5 и 3, т.е. если его последняя цифра 0 или 5 и сумма его цифр делится на 3.

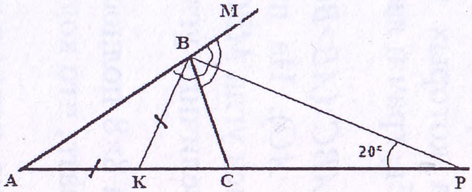
Ответ:* *20198745.

2. *Решение:* Поскольку на 120-й по счету березе сидят голубь, грач и ласточка, то из условия следует, что грачи сидят на 120-й, 118-й, …, 2 березе, т.е. на всех березах, порядковые номера которых кратны 2. Голуби сидят на березах с номерами: 120, 117, …, 3, т.е. на всех березах с порядковыми номерами, кратными 3. Ласточки сидят на березах с номерами: 120, 115, …, 5, т.е. на всех березах с порядковыми номерами, кратными 5. Таким образом, нам необходимо подсчитать, сколько чисел от 1 до 120 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

Сначала исключим все числа, кратные 2, т.е. четные. Осталось 60 нечетных чисел. Далее исключим нечетные числа, кратные 3. Таких чисел будет (120:3):2=20 (каждое второе число из кратных 3 – четное). Осталось 60–20=40 чисел. Из этих чисел исключим те, которые кратны 5. Выпишем нечетные числа, кратные 5: 5, ~~15~~, 25, 35, ~~45~~, 55, 65, ~~75~~, 85, 95, ~~105~~, 115. Зачеркнем числа, кратные 3 (они уже были исключены, как кратные 3). Осталось исключить 8 чисел: 40–8=32. Итак, 32 числа, не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Т.е. 32 дерева будут «свободны от птиц».

Ответ:* *32 березы.

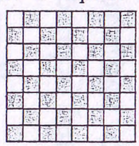
3. *Решение:* Докажем, что прямые *BK* и *BP* перпендикулярны. Так сумма углов *ABC* и *CBM* равна 180°, то сумма их «половинок» равна 90°, т.е. $\angle KBC+\angle CBP=90°$.



В прямоугольном треугольнике *KBP* $\angle BKC=90°-20°=70°$. Но $\angle BKC$ является внешним для треугольника *AKB*, значит $\angle BKC=\angle BAK+\angle ABK$. Поскольку *AK*=*BK*, то $\angle BAK=\angle ABK=\frac{1}{2}\angle BKC=\frac{1}{2}\cdot 70°=35°$.

***Ответ*: 35°.**

4. *Доказательство:* Рассмотрим шахматную раскраску доски. Всего в белый и черный цвета выкрашены по 32 клетки. Каждая фигурка вида 1 закрывает 2 черные и 2 белые клетки. Значит, все фигурки вида 1 закроют равное количество черных и белых клеток. Тогда и фигурки вида 2 также закроют равное число черных и белых клеток. Каждая фигурка вида 2 закрывает 1 черную и 3 белые клетки (назовем такую фигурку 2А), либо 1 белую и 3 черные клетки (назовем такую фигурку 2Б). Фигурок типа 2А и 2Б должно быть поровну, следовательно, фигурок второго вида будет четное количество.



Что и требовалось доказать

5. *Решение:* Пусть на доске было выписано m четных и n нечетных чисел. Произведение двух натуральных чисел будет четным в двух случаях: оба множителя четные или множители имеют разную четность. Подсчитаем количество произведений, в которых оба множителя четные. Первый множитель можно выбрать m способами, второй множитель можно выбрать из m–1 оставшихся четных чисел. Всего таких пар будет $\frac{m(m-1)}{2}$ (делим на

2, так как ab и ba это одно и то же произведение). Теперь подсчитаем количество произведений, в которых множители имеют разную четность. Нечетное слагаемое можно выбрать n способами, четное – m способами. Итого получаем mn четных произведений.

Имеем: $\frac{m(m-1)}{2}+mn=44$;

$m(m-1)+2mn=88$;

$m(m-1+2n)=88$.

Несложно видеть, что $m<m-1+2n$ при натуральных m и n. Заметим, что $88=2\cdot2\cdot2\cdot11$. Число 88 можно представить в виде произведения двух натуральных множителей следующим образом (первый множитель должен быть меньше второго):

$88=1\cdot88=2\cdot11=4\cdot22=8\cdot11$. Наибольшее значение первого (меньшего) множителя равно 8. Таким образом, наибольшее значение m, это m=8. Отметим, что при этом $m-1+2n=11$, $8-1+2n=11$, n=2.

***Ответ:* 8.**