УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель начальника главного управления по образованию
Могилевского облисполкома
И.Г. Лошкевич
«21» марта 2022 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения городских, районных олимпиад
по учебному предмету «Математика»

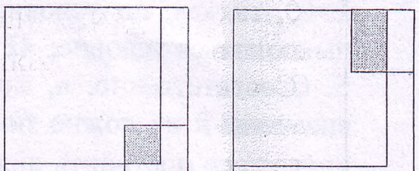
Дата проведения: 31 марта 2022 г.
Время выполнения заданий: 10.00 – 13.00.

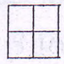
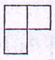
VI класс

1. Напишите наибольшее натуральное число кратное 6, которое бы не превышало 20212022 и все цифры которого были бы различны. Ответ обоснуйте.

2. Вдоль дороги растет 101 береза. На некоторых березах сидят птицы: грачи и голуби. При этом на одном дереве могут сидеть грач и голубь. Известно, среди любых двух подряд стоящих берез, найдется ровно одна береза, на которой сидит грач. А среди любых пяти подряд стоящих берез найдется ровно одна береза, на которой сидит голубь. Сколько найдется берез, на которых не сидит ни одна из птиц, если на последней березе сидит только голубь? Ответ обоснуйте.

3. В большой квадратный зал привезли два квадратных ковра, сторона одного ковра втрое больше стороны другого. Когда их положили в противоположные по диагонали углы зала, они накрыли в два слоя площадь в 9 м², а когда их положили в соседние углы, то они накрыли в два слоя площадь в 15 м². Какова ширина зала?



4. Шахматную доску 8×8 замостили фигурками двух видов:
1)  и 2) 

При этом было использовано m фигурок первого вида и n фигурок второго вида (на доске присутствуют фигурки обоих видов). Какие значения может принимать n? Ответ обоснуйте.

5. На доске записано несколько натуральных чисел. Дима выписал все возможные суммы каких-либо двух из этих чисел, а Миша выписал все возможные произведения каких-либо двух из этих чисел. При этом, среди чисел выписанных каждым мальчиком, могут встретиться одинаковые. Оказалось, что среди чисел, выписанных Димой, встретились 72 нечетных числа, а среди чисел, выписанных Мишей, встретились 36 нечетных чисел. Сколько всего чисел было записано на доске? Ответ обоснуйте.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Указания к решению VI класс

Решения учащихся могут отличаться от авторских.

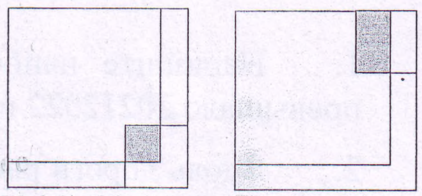
1. *Подсказка.* Натуральное число кратно 6, если оно кратно 2 и 3, т.е. если оно четное и сумма его цифр делится на 3.

Ответ: 20198754.

2. ***Решение:*** Поскольку на 101-й по счету березе сидит только голубь, то из условия следует, что грачи сидят на 100-й, 98-й, …, 2 березе, т.е. на всех березах, порядковые номера которых кратны 2. Всего таких берез будет 50. Голуби сидят на березах с номерами: 101, 96, 91, …, 6, 1. Нетрудно посчитать, что таких берез будет 21: это березы с порядковыми номерами 1=1+5·0, 6=1+5·1, …, 101=1+5·20. Однако на 10 березах с номерами 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96 будет сидеть и голубь и грач. Таким образом, количество берез, на которых сидит хотя бы одна из птиц, равно 50+21–10=61. Количество берез «свободных от птиц» равно 101–61=40.

Ответ: 40.

3. ***Решение:*** В первом случае пересечением ковров является квадрат площади 9 м² (рис. слева), значит, длина стороны этого квадрата равна 3 м. Во втором случае, пересечение – прямоугольник, одна сторона которого также равна 3 м (рис. справа). Следовательно, другая сторона этого прямоугольника равна 15:3 = 5 (м), а это и есть длина стороны меньшего ковра. Значит, сторона большего ковра имеет длину 15 м. Так как стороны ковров накладываются друг на друга на 3 м, то длина стороны зала равна $5 + 15 - 3 = 17$ (м).



Ответ: 17 м.

4. ***Решение:*** Каждая фигурка первого вида закрывает 4 клетки. Тогда все фигурки первого вида закроют количество клеток, кратное 4. Поскольку общее количество клеток на доске (64) кратно 4, то все фигурки второго вида закроют количество клеток, кратное 4. Числа 3 и 4 взаимно простые, а значит, число n фигурок второго вида должно быть кратно 4: $n = 4k$, $k>0$, так как, по условию, на доске присутствуют фигурки обоих видов. При этом должно выполняться условие: $4k \cdot 3 < 64$; $3k < 16$; $k \le 5$. Число $к$ может принимать значения: 1, 2, 3, 4, 5. Соответственно, n, может принимать значения 4, 8, 12, 16, 20. Для каждого из данных значений n несложно построить пример замощения. Например, из четырех фигурок второго вида легко построить прямоугольник 2×6. В зависимости от значения n, на доске легко можно разместить от 1 до 5 таких прямоугольников. Оставшуюся часть доски закрываем фигурками первого вида.

Ответ. 4, 8, 12, 16, 20.

5. ***Решение:*** Пусть на доске было выписано m четных и n нечетных чисел. Произведение двух натуральных чисел будет нечетным, только если оба множителя нечетны. Подсчитаем количество пар из n нечетных чисел. Первый множитель можно выбрать n способами, второй множитель можно выбрать из n–1 оставшихся чисел. Всего таких пар будет $\frac{n(n-1)}{2}$ (делим на 2, так как ab и ba это одно и то же произведение). Итак, $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, далее $n(n-1) = 72$. Поскольку $72 = 9 \cdot 8$, то делаем вывод, что n=9. Итак, на доске было записано 9 нечетных чисел.

Сумма двух чисел будет нечетной, только если складывают четное и нечетное число. Подсчитаем количество пар чисел, записанных на доске, в которых числа имеют разную четность. Нечетное слагаемое можно выбрать 9 способами, четное – m способами. Итого имеем $9m$ нечетных сумм. $9m$=72, откуда m = 8. На доске было записано 8 четных чисел. Всего на доске было записано 9+8=17 натуральных чисел.

Ответ: 17 чисел.