

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

УВАЖАЕМЫЕ УЧАСТНИКИ ОЛИМПИАДЫ! Прежде, чем вы приступите к решению задач, обратите внимание на приведенный ниже справочно-информационный материал. Он будет полезным для успешного решения тех или иных задач и позволит выработать единый подход при выполнении расчетов:

1. При вычислениях используйте следующие значения постоянных величин:

$$\pi \approx 3,14$$

$$\varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} (\text{Ф} \cdot \text{м}^{-1})$$

$$R \approx 8,314 (\text{Дж} \cdot (\text{моль} \cdot \text{К})^{-1})$$

$$g \approx 9,807 (\text{м} \cdot \text{с}^{-2})$$

2. Объем сферы и площадь ее поверхности:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3; \quad S = 4\pi R^2$$

3. Потенциальная энергия равномерно заряженного тонкого сферического слоя:

$$W_p = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Если в условии задачи нет специальных указаний, полученные численные значения ответов необходимо округлять с точностью до трех знаков после запятой. Если условие задачи сформулировано в общем виде и расчеты выполнять не требуется, ответ должен быть представлен в виде конечной формулы.

ЖЕЛАЮ УДАЧИ ВСЕМ УЧАСТНИКАМ ВТОРОГО ЭТАПА РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО ФИЗИКЕ!

Молекулярная физика, Термодинамика, Электростатика | **Задание №1 (Электрический мыльный пузырь) ... 30 БАЛЛОВ**

В условиях невесомости на международной космической станции (МКС) было решено провести небольшой физический эксперимент. Из капли мыльного раствора массой $m_0 = 15$ (мг) с помощью соломинки со встроенным ниппелем выдули мыльный пузырь. Коэффициент поверхностного натяжения раствора $\sigma = 40$ (мН · м⁻¹). Затем мыльному пузырю мгновенно сообщили электрический заряд $q = 69$ (нКл), после чего открыли клапан ниппеля и дождались наступления равновесного состояния. Определите радиус R пузыря в равновесном состоянии.

Пытаясь сопоставить расчетное значение радиуса мыльного пузыря с реальным, космонавты в процессе прямых измерений его диаметра проявили небольшую неаккуратность и пузырь лопнул. Оцените скорость v разлета образовавшихся мыльных брызг.

Искривленная пленка мыльного раствора, из которого выдули пузырь, создает дополнительное (избыточное) давление, которое можно определить несколькими способами. Возможно, кто-то из ребят воспользуется готовой формулой Лапласа, позволяющей определить давление искривленной поверхности жидкости:

$$P' = \sigma \left(\pm \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right)$$

В данном выражении R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости, а знаки определяются в зависимости от того, вогнутая поверхность («-») у жидкости или же выпуклая («+»). Для сферической поверхности давление, обусловленное ее кривизной, составляет

$$P' = \frac{2\sigma}{R}$$

У мыльного пузыря две поверхности – наружная и внутренняя, поэтому дополнительное давление искривленной поверхности мыльного пузыря будет определяться выражением:

$$P' = \frac{2\sigma}{R_{\text{внешн}}} + \frac{2\sigma}{R_{\text{внутр}}}$$

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

Без сомнений, толщина стенок мыльного пузыря достаточно мала по сравнению с его радиусом для того, чтобы воспользоваться весьма удобным приближением: $R_{\text{внешн}} \approx R_{\text{внутр}} \approx R_0$. С учетом этого избыточное (дополнительное) давление, создаваемое мыльной пленкой, оказывается равным

$$P' = \frac{4\sigma}{R}$$

Если кто-то забыл ну или же вовсе никогда не слышал про формулу Лапласа, не беда. Избыточное давление можно определить вполне традиционными способами, которыми должны владеть участники олимпиады в 11 классе. Вот один из них. В условиях невесомости мыльный пузырь имеет сферическую форму. Что если сферу пузыря представить в виде двух одинаковых полусфер, полученных с помощью сечения плоскостью, проходящей через центр сферы? Пузырь находится в равновесном состоянии, значит сила давления, создаваемого растянутой искривленной поверхностью полусферы пленки, компенсируется силой ее поверхностного натяжения в диаметрально сечении:

$$P' \cdot \pi R^2 = \sigma \cdot 2\pi R_{\text{внешн}} + \sigma \cdot 2\pi R_{\text{внутр}} \approx 4\sigma\pi R$$

$$P' = \frac{4\sigma}{R}$$

Это был динамический подход. Аналогичный результат можно получить, используя энергетический подход. Изменение радиуса поверхности на бесконечно малую величину dR приводит к элементарному (бесконечно малому) изменению объема:

$$dV = \frac{4}{3}\pi((R + dR)^3 - R^3) = \frac{4}{3}\pi(3R^2dR + 3R(dR)^2 + (dR)^3) \approx 4\pi R^2dR$$

Владеющие дифференцированием получают аналогичный результат очевидным образом:

$$\frac{dV}{dR} = 4\pi R^2 \Rightarrow dV = 4\pi R^2dR$$

Изменится не только объем, но и площадь поверхности сферы:

$$dS = 4\pi((R + dR)^2 - R^2) = 4\pi(2RdR + (dR)^2) \approx 8\pi R dR$$

Владеющие дифференцированием легко подтвердят правильность этого результата:

$$\frac{dS}{dR} = 8\pi R \Rightarrow dS = 8\pi R dR$$

Случись элементарное изменение объема пузыря, силы поверхностного натяжения совершат элементарную механическую работу:

$$dA = P'dV = P'4\pi R^2dR$$

Поверхностный слой жидкости, как известно, обладает избыточной по отношению к остальному объему потенциальной энергией, а значит применима теорема о потенциальной энергии:

$$dA = -dE_p = \sigma dS = \sigma 8\pi R dR$$

Важно не забыть, что мыльный пузырь в отличие, скажем, от пузырька воздуха в воде, имеет две поверхности, поэтому в последнее соотношение требуется внести очевидную корректировку:

$$dA = 16\sigma\pi R dR$$

Еще немного математики, и мы получаем уже хорошо известный нам результат:

$$P'4\pi R^2dR = 16\sigma\pi R dR$$

$$P' = \frac{4\sigma}{R}$$

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

Энергетический подход более громоздкий, но, как говорится, что кому по душе ... В любом случае участник олимпиады по физике среди учащихся 11 класса должен обладать достаточными знаниями и умениями для определения дополнительного (избыточного) давления искривленной поверхности жидкости, даже если про формулу Лапласа он ничего и не слышал. Главное, безусловно, чтобы конечный результат оказался физически правильным и не зависел от выбранной траектории движения к нему.

Определение избыточного давления искривленной поверхности мыльной пленки – задача не из простых, и она по праву приносит участнику 9 баллов. Допускаю, что тем из участников, кто будет находить избыточное давление, начисление такого количества баллов тем участникам, кто за на этом этапе решения воспользуется готовой формулой, покажется незаслуженным, но, как говорится, кто как готовился к состязанию ...

Появление у пузыря электрического заряда приведет к тому, что силы электростатического отталкивания будут стремиться растянуть его, оказывая на оболочку пузыря электростатическое давление. После открытия клапана ниппеля воздух МКС выходит из игры, поскольку его давление внутри и снаружи пузыря становится одинаковым, и теперь только избыточное давление, создаваемое силами поверхностного натяжения искривленной поверхности мыльной пленки, в состоянии уравновесить электростатическое давление. **За правильный анализ и определение условия равновесия мыльного пузыря после сообщения ему электрического заряда добавляем в копилку участника еще 3 балла.**

Пусть R – искомый радиус пузыря. Как уже отмечалось, равновесное состояние системы после сообщения электрического заряда будет определяться соотношением:

$$P_{\text{эл}} = P'$$

Необходимо определить электростатическое давление, оказываемое зарядом на оболочку пузыря. Общеизвестной (готовой) формулы на этот случай нет, а потому ее придется получить. Для этого, на мой взгляд, удобнее всего воспользоваться энергетическим подходом. Если электрический заряд равномерно распределен по сферической поверхности, потенциальную энергию такой системы можно вычислить следующим образом:

$$W_p = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Заряд мыльного пузыря с течением времени остается неизменным, стало быть, потенциальная энергия определяется только радиусом сферической поверхности. Предположим, что силы электростатического отталкивания привели к увеличению радиуса поверхности на бесконечно малую величину dR , в результате чего потенциальная энергия изменилась на

$$dW_p = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R + dR} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dR}{R(R + dR)} \approx -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} dR$$

Те, кто уверенно владеют дифференцированием, могут получить аналогичный результат путем простого дифференцирования выражения для потенциальной энергии заряженной сферы. Совершенную при этом кулоновской силой элементарную работу определим проверенным способом:

$$dA_k = P_{\text{эл}} dV = P_{\text{эл}} 4\pi R^2 dR$$

С учетом постоянства заряда сферы для вычисления работы сил электростатического поля можно было бы воспользоваться фундаментальным выражением $dA = q \cdot d\phi$, но нам ведь необходимо электростатическое давление на поверхность пузыря, так что этот вариант был бы для нас неудобен в применении. Элементарное изменение потенциальной энергии найдено, элементарная работа определена, пора еще раз вспомнить про теорему о потенциальной энергии:

$$dA_k = -dW_p$$

$$P_{\text{эл}} 4\pi R^2 dR = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2} dR$$

$$P_{\text{эл}} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^4}$$

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

С получением последнего соотношения дилетант явно не справился бы, поэтому **успешное определение величины электростатического давления равномерно заряженной сферы приносит участнику дополнительные 9 баллов**. Собираем все промежуточные результаты в одно выражение, и оно оказывается следующим:

$$\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = \frac{4\sigma}{R}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{q^2}{128\pi^2\sigma\epsilon_0}}$$

Ну вот как-то так ... **За правильное выражение для радиуса пузыря даем участнику еще 2 балла** и переходим к расчетам:

$$R = \sqrt[3]{\frac{69^2 \cdot 10^{-18}}{128 \cdot 3,14^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} \approx 0,022 \text{ (м)} = 22 \text{ (мм)}$$

Что ж, пузырь получился довольно большим ... **Расчеты пусть и не очень сложные, но их необходимо выполнить правильно, и при условии, что с ними все хорошо, добавляем к результату участника 1 балл.**

Теорию крайне важно сопоставлять с реальной картиной. Космонавты решили непосредственно измерить диаметр пузыря, но что-то пошло не так, и пузырь лопнул, разбросав брызги мыльного раствора во все стороны. Оценочные расчеты не обязывают нас стремиться к высокой степени точности. Старина Оккам советовал не множить сущности без надобности. Так и поступим. Будем считать, что в силу центральной симметрии лопнувший пузырь разлетится в виде большого количества одинаковых микроскопических капелек мыльного раствора массой dm каждая равномерно по всем направлениям, при этом скорости капелек будут одинаковы по величине. Воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - 4\pi\sigma R^2 = \frac{dm_1 v^2}{2} + \frac{dm_2 v^2}{2} + \dots + \frac{dm_n v^2}{2} = \frac{(dm_1 + dm_2 + \dots + dm_n) v^2}{2} = \frac{m_o v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_o} \left(\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} - 4\pi\sigma R^2 \right)}$$

Формула получена. **Если результат участника оказался аналогичным, начисляем ему еще 5 баллов.** Надо ли было учитывать потенциальную энергии искривленной поверхности жидкости? Если сравнить величину электростатической потенциальной энергии с величиной избыточной потенциальной энергии искривленной поверхности, то окажется, что это абсолютно сопоставимые между собой величины одного порядка. Разлету капель, разумеется, будет способствовать электростатическое отталкивание, но по сравнению с энергией пузыря, как заряженного объекта, его потенциальной поверхностной энергией пренебрегать нельзя. Таким образом, после подстановки численных данных оценочное значение скорости оказывается следующим:

$$v = \sqrt{\frac{2}{15 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{69^2 \cdot 10^{-18}}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 0,022} - 4 \cdot 3,14 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \cdot 0,022^2 \right)} \approx 9,865 \text{ (м} \cdot \text{с}^{-1}\text{)}$$

Это был заключительный этап решения, и за его успешное прохождение участнику следует отдать последний 1 балл. Кстати, не знаю, как вам, а мне полученный результат кажется вполне правдоподобным, а задача интересной и адекватной ...)))

Давайте соберем воедино все критерии начисления баллов по данной задаче при проверке решений участников:

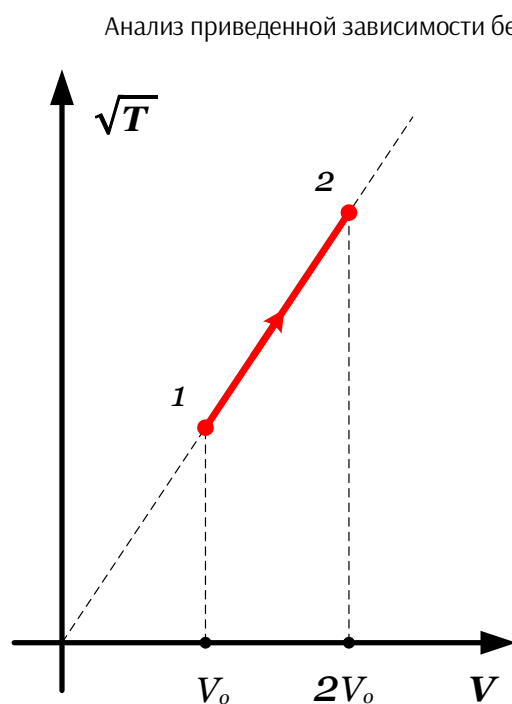
ЭТАП РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	КОЛИЧЕСТВО БАЛЛОВ
Определение избыточного давления искривленной поверхности мыльной пленки	9
Определение условия равновесия мыльного пузыря после сообщения ему электрического заряда	3

Определение величины электростатического давления равномерно заряженной сферы	9
Получение расчетной (конечной) формулы для радиуса пузыря	2
Расчет радиуса пузыря	1
Получение расчетной (конечной) формулы для оценки скорости разлета брызг мыльного раствора	5
Расчет оценочного значения скорости разлета	1

Таким образом, **максимальное количество баллов за решение данной задачи составляет 30 баллов**. Уважаемые члены жюри олимпиады! Количество баллов за успешное прохождение того или иного этапа решения определено соразмерно сложности этапа и перераспределять баллы в ту или иную сторону было бы нецелесообразно. Переходим к следующей задаче ...

Термодинамика | Задание №2 (Газовый процесс) ... 20 БАЛЛОВ

Состояние аргона, взятого в количестве $\nu = 2,5$ (моль), изменяется так, как показано на рисунке. Какова работа, совершенная газом в ходе процесса, и какое количество теплоты потребовалось для этого сообщить газу? В начальном состоянии абсолютная температура газа $T_0 = 276$ (К). Полученные результаты округлите до целых значений.



Анализ приведенной зависимости без труда позволяет увидеть, что мы не имеем дело с изопроцессом. В этой связи хорошо бы начать решение с определения уравнения процесса. Он изображен прямой линией, продолжение которой проходит через начало координат, стало быть, это прямая пропорциональность, и ее уравнение будет следующим:

$$\frac{\sqrt{T}}{V} = \text{Const}$$

Первый этап решения успешно пройден, и тем **участникам, которые получают уравнение процесса, можно смело давать первые 5 баллов**.

Для определения количества теплоты, сообщенной газу, очевидно, понадобится первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A'$$

Мысль отличная, и **за это в копилку участника можно добавлять 2 балла**.

Для определения изменения внутренней энергии данного количества аргона почти все готово, остается уточнить некоторые детали. Аргон, как и все прочие инертные газы, является одноатомным, поэтому $i = 3$. Как бы ни было, для определения коэффициента числа степеней свободы молекулы газа нам **пришлось задействовать кое-какие знания из химии, и это заслуживает того, что начислить участнику еще 1 балл**. Ну и нам понадобится выяснить на сколько изменилась температура газа в ходе процесса. Это можно сделать с помощью уравнения процесса

$$\frac{\sqrt{T_1}}{V_1} = \frac{\sqrt{T_2}}{V_2} \Rightarrow \frac{T_1}{V_1^2} = \frac{T_2}{V_2^2}$$

$$T_2 = \frac{T_1}{V_1^2} V_2^2 = \frac{T_0}{V_0^2} \cdot 4V_0^2 = 4T_0$$

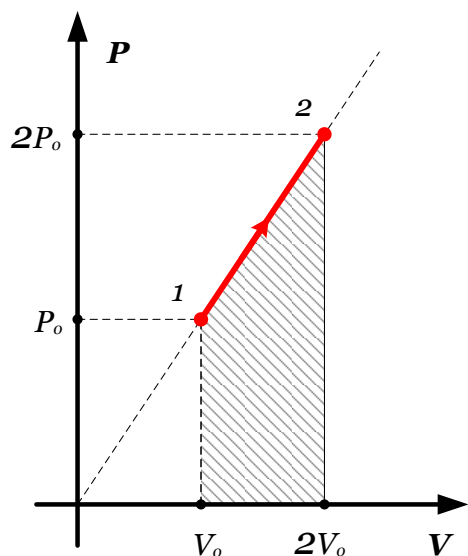
$$\Delta T = 3T_0$$

За правильное определение изменения абсолютной температуры газа участники добывают еще 2 балла. Теперь у нас есть все, что необходимо для нахождения изменения внутренней энергии газа и самое время ее отыскать:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R \cdot 3T_0 = \frac{9}{2} \nu R T_0$$

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

За правильное нахождение изменения внутренней энергии газа на счет участника следует добавить 1 балл. А вот для того, чтобы определить работу газа, придется найти взаимосвязь между давлением газа и его объемом. Это абсолютно типовой подход. Что для этого понадобится? Уравнение процесса и, конечно же, уравнение Клапейрона-Менделеева – как же без него:



$$\frac{\sqrt{T}}{V} = \text{Const} \Rightarrow T = V^2 \cdot \text{Const}^2$$

$$PV = \nu RT$$

Немного элементарной математики, и мы находим то, что хотели:

$$PV = \nu R V^2 \cdot \text{Const}^2$$

$$\frac{P}{V} = \text{Const}'$$

Это не самый простой этап решения, да к тому же еще и ключевой, поэтому **участники, получившие данное соотношение, по праву получают в свою копилку очередные 3 балла**. Таким образом, давление газа в ходе данного нам процесса изменяется прямо пропорционально его объему, и это отличные новости, потому как работу, совершенную

аргоном, можно определить графически:

$$A' = \frac{P_0 + 2P_0}{2} (2V_0 - V_0) = \frac{3}{2} P_0 V_0 = \frac{3}{2} \nu R T_0$$

Напомню, всякий раз, когда мы сталкиваемся с какими-то нетипичными процессами, работа газа в ходе которых не определяется теми или иными общеизвестными (готовыми) соотношениями, и при этом нет ни малейшего желания заниматься интегрированием, графический способ – единственная возможность определения совершенной газом работы, хотя, справедливости ради замечу, что сам по себе данный прием является графической интерпретацией определенного интеграла. Поскольку **получение конечной формулы для определения работы потребовало не только понимание физики происходящего, но и умение вычислять площадь трапеции**, за успешное прохождение данного этапа решения с легкой душой отдаем ребятам еще 3 балла.

И теперь остается определить количество теплоты, сообщенной газу:

$$Q = \Delta U + A' = \frac{9}{2} \nu R T_0 + \frac{3}{2} \nu R T_0 = 6 \nu R T_0$$

Добавляем за конечную формулу для количества теплоты еще 1 балл в общую копилку результативности участника.

Ну вот, дело сделано! Завершаем решение, выполняя необходимые расчеты:

$$A' = 1,5 \cdot 2,5 \cdot 8,314 \cdot 276 = 8604,99 \approx 8605 \text{ (Дж)}$$

$$Q = 6 \cdot 2,5 \cdot 8,314 \cdot 276 = 34419,96 \approx 34420 \text{ (Дж)}$$

Оставшиеся 2 балла начисляем по одному за каждое из двух успешно проведенных вычислений. Настает пора собрать воедино все критерии начисления баллов по данной задаче при проверке решений участников:

ЭТАП РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	КОЛИЧЕСТВО БАЛЛОВ
Определение уравнения процесса	5
Необходимость применения первого начала термодинамики	2
Определение коэффициента числа степеней свободы молекулы аргона	1
Определение изменения абсолютной температуры газа	2
Определение изменения внутренней энергии аргона	1

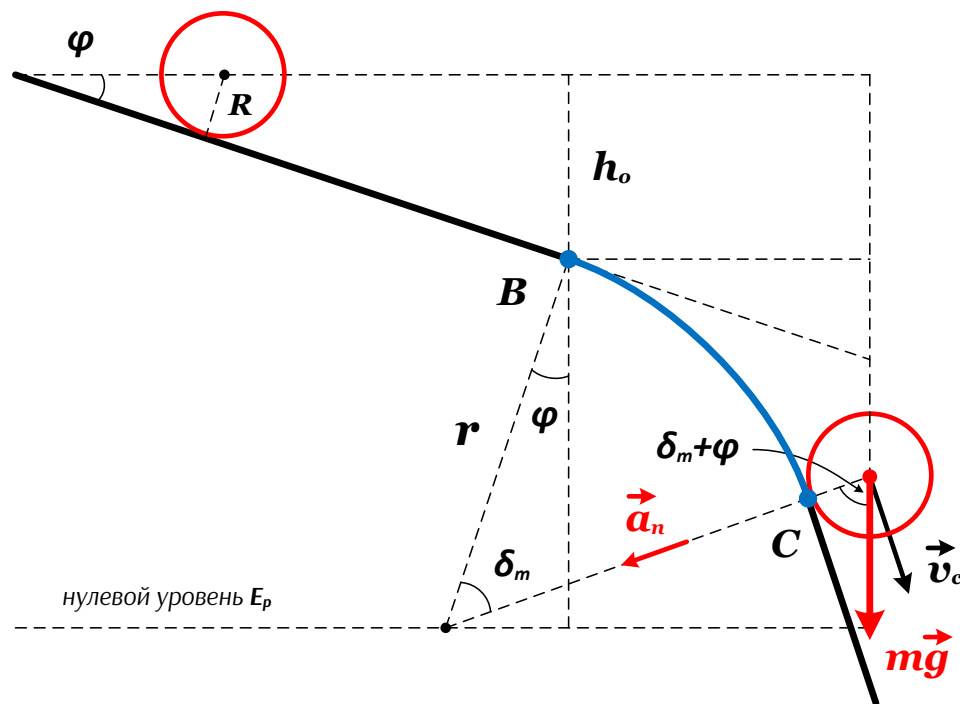
Установление взаимосвязи между давлением и объемом газа в ходе процесса	3
Определение работы, совершенной газом	3
Определение количества теплоты, сообщенного газу	1
Расчет совершенной газом работы	1
Расчет количества теплоты, сообщенной газу	1

Таким образом, **максимальное количество баллов за решение данной задачи составляет 20 баллов**. Уважаемые члены жюри олимпиады! Количество баллов за успешное прохождение того или иного этапа решения определено соразмерно сложности этапа и перераспределять баллы в ту или иную сторону было бы нецелесообразно. Переходим к последней задаче ...

Механика | Задание №3 (Двускатная горка) ... 25 БАЛЛОВ

Предположим, что в нашем распоряжении есть двускатная горка, профиль которой представлен на рисунке. Угол наклона верхнего ската по отношению к горизонту равен $\varphi = 30^\circ$. Переход между плоскими поверхностями скатов реализован посредством закругления в виде дуги окружности радиуса $r = 1$ (м) с центральным углом δ . Тонкое однородное недеформируемое кольцо радиусом $R = 25$ (см) помещают на горку так, что его плоскость совпадает с плоскостью рисунка, и осторожно отпускают без начальной скорости. В исходном положении центр кольца находился на высоте $h_0 = 60$ (см) по отношению к началу закругления. Определите значение угла δ_m , при котором кольцо в процессе своего движения сможет двигаться без отрыва от поверхности горки? Полученный ответ округлите до целого значения. Скатывание кольца происходит без проскальзывания и скачков.

Задача интересна тем, что акцент в ее решении ставится на умение анализировать возможные варианты. Очевидно, в процессе скатывания кольцо неизбежно достигнет начала закругления без какого-либо отрыва или скачков. Первая проблема может возникнуть в точке В (см. рис.). Если касательная к окружности в этой точке будет наклонена к горизонту под углом, превышающем φ , колесо оторвется от горки и уйдет в свободный полет, а если угол наклона касательной окажется меньше угла наклона верхнего ската, кольцо при переходе на закругление подскочит. Ни того, ни другого наблюдаться не должно, а потому единственно возможный



вариант – касательная к окружности в точке В должна лежать в плоскости верхнего ската, т. е. должна быть наклонена к горизонту под углом φ .

Что же касается перехода кольца в процессе своего движения на нижний скат (точка С), то здесь ситуация следующая. Вектор скорости центра масс кольца в точке С должен быть параллелен плоскости нижнего ската, которая, конечно же, должна содержать при этом касательную к окружности в точке С. Почему так? А потому, что ежели нижний скат будет составлять с вертикалью угол, меньший, чем вектор скорости центра масс кольца с вертикалью, кольцо, достигнув точки С, сорвется в свободное падение, ну а в случае большего

угла с вертикалью катящееся кольцо при первом касании нижнего ската подскочит. Ни того, ни другого, напомним, по условию задачи наблюдаться не должно.

Наконец, кольцо рискует оторваться от горки на этапе движения по закруглению, и этого тоже необходимо избежать. Все зависит от длины дуги закругления, определяемой величиной центрального угла δ , стало быть, мы и должны определить такое его

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

значение, при котором отрыва не случится вплоть до точки С. **За анализ конфигурации горки для обеспечения движения кольца без отрыва и скачков ребятам добывают первые 6 баллов в копилку данной задачи.**

Для определенности будем считать, что нулевой уровень отсчета гравитационной потенциальной энергии проходит через центр кривизны перехода между скатами горки. Поскольку кольцо в данной задаче не может считаться материальной точкой, мы обязаны рассматривать движение его центра масс, который, очевидно, совпадает с центром симметрии кольца. С учетом этого в начальный момент времени полная энергия тела будет определяться выражением:

$$E_{\text{нач}} = mg(h_o + r \cos(\varphi))$$

Здорово! **Тем, кто определил начальную энергию тела, добавляем 2 балла.** Кольцо осторожно отпускают, и оно начинает двигаться в вертикальной плоскости вниз по верхнему скату, постепенно раскручиваясь при этом. Пока ничего критичного или настораживающего не происходит. Все интересное начинается тогда, когда кольцо достигает перехода между скатами (точка В) и его движение становится криволинейным. Длина дуги может оказаться такой, что в некоторой ее точке кольцо оторвется от поверхности горки, и дальнейшее его движение будет представлять собой свободное падение. Предположим, что это происходит в точке С. Задача о движении тела по наклонной поверхности является абсолютно типовой задачей по механике, да и задача о нахождении точки отрыва тела от сферической наклонной поверхности не менее типовая, поэтому в нашем случае описание движения кольца не должно вызвать серьезных затруднений у участников олимпиады, особенно если речь идет об учащихся 11 класса. Повторюсь: пока ничего эдакого, но я вполне допускаю, что не все ребята обратят внимание на вращательно-поступательное движение с вытекающей отсюда физической «изюминкой» ...)))

Предельное значение δ_m будем определять исходя из того, что в точке С мы разрешим кольцу на мгновение оказаться в состоянии невесомости. Потеря контакта с поверхностью означает, что тело перестает на нее давить. Индикатором этого является исчезновение нормальной силы реакции поверхности N . Динамика кольца в точке отрыва очевидна:

$$m\vec{a}_c = m\vec{g}$$

$$m \frac{v_c^2}{r + R} = mg \cos(\delta_m + \varphi) \Rightarrow v_c^2 = g(r + R) \cos(\delta_m + \varphi)$$

За успешное нахождение скорости центра масс кольца в момент его отрыва на счет участника необходимо зачислить 5 баллов. Теперь не помешало бы подключить закон сохранения энергии, но возможно ли это, ведь на кольцо в процессе движения действует сила трения? С чего вдруг мы коснулись трения?

Обратите внимание: в задаче сказано, что кольцо скатывается без проскальзывания, а без наличия трения подобное невозможно. Трение грозит нарушением закона сохранения энергии, и потому необходимо во что бы то ни стало помешать ему нарушить наши планы. Очевидно, мы имеем дело с трением покоя, и поскольку точка ее приложения к кольцу в любой момент времени неподвижна относительно поверхности горки (проскальзывание отсутствует), сила трения покоя работу совершать не будет. Что касается остальных сил, то сила тяготения является консервативной, нормальная сила реакции поверхности перпендикулярна мгновенной скорости кольца, а значит работы она тоже не совершает, так что препятствий для сохранения полной механической энергии кольца нет. Класс! Мы сделали это! Трение нам не помеха! ...))) **Анализ возможности применения закона сохранения полной механической энергии необходимо обязательно отметить, добавив за него участнику 3 балла.** Действуем!

$$mg(h_o + r \cos(\varphi)) = 2 \frac{mv_c^2}{2} + mg(r + R) \cos(\delta_m + \varphi)$$

А вот и та самая «изюминка», о которой я упоминал. Кольцо-то ведь катится, и в рамках закона сохранения энергии мы обязаны учитывать кинетическую энергию не только его поступательного, но и вращательного движения! Вот тут многие коллеги могут запротестовать, обвинив меня в выходе за пределы дозволенного. Позволю себе с ними не согласиться. Факт того, что если тонкое кольцо катится без проскальзывания, величины кинетической энергии его поступательного и вращательного движения равны, должен в обязательном порядке вкладываться в умы ребят при их подготовке к физическим олимпиадам. Это обстоятельство объясняет удвоение кинетической энергии поступательного движения кольца. Важный этап, и **ребята, применившие для решения задачи закон сохранения энергии и не позабывшие при этом учесть кинетическую энергию вращения, зарабатывают еще 5**

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

баллов. Необходимость учета кинетической энергии вращения принципиальна, а ежели кто-то из участников этого не сделал, не принимать это обстоятельство во внимание при проверке работ участников было бы ошибочно с точки зрения физики!

В качестве дополнительного комментария к удвоению энергии позволю себе небольшое отступление. Есть известная задача об упругом столкновении небольшого тела, летящего с некоторой скоростью, с массивной плитой, в свою очередь движущейся ему навстречу с некоторой скоростью. Задача известная, равно как и известен ее результат. Эта задача многими коллегами включается в перечень обязательных к разбору при подготовке ребят к олимпиадам по физике. Согласен на все сто, но рассматривать ее решение надлежит не только и не столько в рамках кинематики, опираясь при этом на использование сомнительной манипуляции системами отсчета, сколько в рамках блока задач на столкновения тел, опираясь на фундаментальные законы сохранения импульса и энергии. Это я к тому, что задачу о катящемся без проскальзывания кольце (обруче) следует в обязательном порядке рассматривать не только в рамках кинематики, но и с энергетической точки зрения, безусловно упоминая ситуацию с удвоением кинетической энергии. Однако, вернемся к решению ...)))

Связываем последнее соотношение с выражением, которое дал нам второй закон Ньютона, выполняем необходимые преобразования и в результате этого получаем:

$$h_o + r \cos(\varphi) = 2(r + R) \cos(\delta_m + \varphi)$$

$$\cos(\delta_m + \varphi) = \frac{h_o + r \cos(\varphi)}{2(r + R)}$$

Таким образом, искомый нам угол будет определяться выражением:

$$\delta_m = \arccos\left(\frac{h_o + r \cos(\varphi)}{2(r + R)}\right) - \varphi$$

Приступаем к расчетам:

$$\delta_m = \arccos\left(\frac{0,6 + \cos(30^\circ)}{2 \cdot 1,25}\right) - 30^\circ \approx 24^\circ$$

При углах $\delta \leq \delta_m$ кольцо будет двигаться по обеим скатам крыши, а если окажется, что $\delta > \delta_m$, оно сорвется с поверхности горки и дальнейшее движение кольца будет представлять собой свободное падение. **Тем, кто успешно справился и с этим этапом решения, добавляем в копилку результативности еще 3 балла.**

Поскольку закругление является обязательным элементом конфигурации горки, мы обязаны наложить очевидное условие $\delta > 0$. Давайте посмотрим, во что это выльется:

$$\arccos\left(\frac{h_o + r \cos(\varphi)}{2(r + R)}\right) > \varphi$$

Рассматриваемые нами углы являются острыми, а косинус, как известно, в первой координатной четверти является убывающей функцией, поэтому последнее неравенство становится таким:

$$\frac{h_o + r \cos(\varphi)}{2(r + R)} < \cos(\varphi)$$

Сегодня было довольно много математики, осталось совсем немного:

$$h_o < (r + 2R)\cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) > \frac{h_o}{r + 2R}$$

$$\varphi < \arccos\left(\frac{h_o}{r + 2R}\right)$$

МОГИЛЕВСКАЯ ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ | 2020-2021 УЧЕБНЫЙ ГОД

Все желающие могут вместе со мной убедиться, что применительно к исходным данным нашей задачи это условие выполняется:

$$\arccos\left(\frac{0,6}{1 + 2 \cdot 0,25}\right) \approx 66,42^\circ$$

$$30^\circ < 66,42^\circ$$

А если бы нет? Что означало бы невыполнение данного условия? А означало бы оно то, что в процессе скатывания кольцо оторвется от поверхности горки непосредственно в точке В, уйдя в свободное падение, и тем **участникам, которые не забудут выполнить анализ полученного ответа, добавляем последние 2 балла ...)))**

Настала пора собрать воедино все критерии начисления баллов по данной задаче при проверке решений участников:

ЭТАП РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	КОЛИЧЕСТВО БАЛЛОВ
Анализ конфигурации горки для обеспечения требуемого движения	6
Определение первоначальной энергии кольца	2
Нахождение величины скорости центра масс кольца в момент отрыва	5
Анализ возможности применения закона сохранения полной механической энергии	3
Применение закона сохранения полной механической энергии	5
Получение конечной формулы и расчет предельно возможного угла закругления	2
Анализ полученного результата	2

Таким образом, **максимальное количество баллов за решение данной задачи составляет 25 баллов**. Уважаемые члены жюри олимпиады! Количество баллов за успешное прохождение того или иного этапа решения определено соразмерно сложности этапа и перераспределять баллы в ту или иную сторону было бы нецелесообразно.